Concours STIC session 2017

Composition : Physique 4 (mécanique, optique)

Durée : 3 Heures

Les calculatrices sont autorisées.

N.B : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte deux grandes parties : OPTIQUE et MECANIQUE.

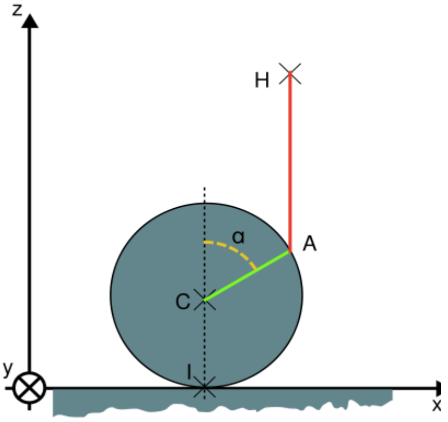
MECANIQUE

Un ballon sphérique rigide a un rayon R, une masse m uniformément répartie en surface et un moment d'inertie $J = \frac{2}{3}mR^2$ par rapport à tout axe passant par son centre. Il roule sans glisser sur le sol horizontal de sorte que son centre C reste dans le plan xOz d'un référentiel $\mathcal{R}(O,x,y,z)$ supposé galiléen, dont Oz désigne la verticale ascendante. L'intensité de la pesanteur est g ; les vecteurs unitaires portés par les axes Ox, Oy et Oz sont respectivement désignés par $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ et forment un trièdre direct.

Le coefficient de frottement de glissement au contact entre le ballon et le sol est f. Ce coefficient caractérise l'action de contact du sol sur le ballon. Cette action se réduit à une force inconnue appliquée en I.

Si $|R_x| < fR_z$ le ballon ne glisse pas sur le sol ; si le ballon glisse alors : $|R_x| = fR_z$.

Un clown, a ses pieds en un point A du ballon situé dans le plan xoz et tel que la droite CA fasse un angle α donné et constant avec la verticale (cf. figure). Le clown, de centre de masse H, marche ou court à petits pas sur le ballon en direction de son point le plus haut ; il fait en sorte qu'à tout instant la droite instantanée CA fasse l'angle α avec la verticale et la droite



AH soit constamment verticale (cf. figure). On donne : $AH = 2R$. Le clown est assimilé à un solide de masse m' en mouvement de translation dans $\mathcal{R}$; on néglige ainsi l'inertie des parties mobiles du clown dans sa marche ou sa course à petits pas.

On appelle S le système matériel constitué par le clown et le ballon.

Notations : la vitesse du centre C du ballon dans le référentiel $\mathcal{R}$ est notée $\vec{v}_c = v(t)\vec{e}_x$ et son vecteur rotation dans $\mathcal{R}$ est noté $\vec{\omega}_{ballon} = \omega(t)\vec{e}_y$

A — Cinématique et cinétique

1. Quelles sont la vitesse $\vec{V}_H$ et l'accélération $\vec{a}_H$ de H dans $\mathcal{R}$

2. Quelle est la relation traduisant le roulement sans glissement du ballon sur le sol ?

3. Exprimer la vitesse du clown par rapport à la surface du ballon soit
$\vec{V} = \vec{v}_{A\in clown} - \vec{v}_{A\in ballon}$

4.a. Quel est, dans $\mathcal{R}$ le moment cinétique $\vec{L}_C$ du ballon en son centre C ? On exprimera $\vec{L}_C$ en fonction de m, R et v.

4.b. En déduire le moment cinétique $\vec{L}_I$ du ballon au point de contact avec le sol I.

5.a. Quel est, dans $\mathcal{R}$ le moment cinétique $\vec{L}_H$ du clown en H ? En déduire, dans $\mathcal{R}$, le moment cinétique $\vec{L}_I$ du clown en I.

5.b. Exprimer en fonction de $R,\ v,\ m,\ M\ et\ \alpha$ le moment cinétique total $\vec{L}_I$ du système S en I, dans le référentiel

B — Dynamique

1. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au système S. Ces actions sont-elles connues ou inconnues ?

2.a. On admet que: $\frac{d\vec{L}_{I,S}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,ext\to S}$ où $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,ext\to S}$ désigne le moment, pris en I, de toutes les actions extérieures appliquées à S.

Montrer que : $\frac{dv}{dt} = \frac{m' g sin\alpha}{\frac{5}{3}m + m'(3+cos\alpha)}$

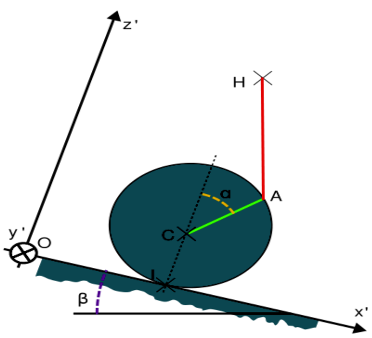
2.b. Calculer numériquement $a = \frac{dv}{dt}$ pour $m' = 60\ kg\ ;\ m = 6\ kg$
$R = 0{,}5\ m\ ;\ \alpha = 5°;\ g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

3.a. Calculer littéralement (en fonction de $m',\ m,\ g\ et\ a$) puis numériquement les composantes $R_x\ et\ R_z$ de la réaction du sol sur le ballon.

b. Montrer que si f = 0,2 il ne peut y avoir glissement ni au départ, ni en un instant ultérieur.

4. Le clown ne peut courir à petits pas à plus de $V_{max} = 2\ m.s^{-1}$ par rapport à la surface du ballon. Initialement le clown et le ballon sont immobiles. Au bout de quel temps T cette vitesse est-elle atteinte ? Quelle est la distance L parcourue par le ballon ? On demande pour T et L les expressions littérales (en fonction de V_{max} et de a) et les valeurs numériques.

C. Statique et dynamique sur un plan incliné



Le ballon est désormais sur une planche inclinée d'un angle β par rapport au sol. Le clown est toujours vertical : AH est orthogonal au sol.
Le clown marche ou court à petit pas pour maintenir l'angle algébrique entre les vecteurs

$\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{CA}$ constamment égal à α.

On admet que la démarche menée dans les parties A et B conduit, dans ce cas, au résultat suivant : $\frac{dv}{dt} = \frac{mg\sin\beta + m' g(\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta)}{\frac{5}{3}m + m'(1+3\cos\alpha+2\cos\beta)}$

en notant $\vec{v}_c = v(t)\vec{u}_{z'}$ et $\vec{u}_{z'}$ un vecteur unitaire de la ligne de plus grande pente de la planche inclinée dirigé vers le bas (cf. figure).

1. Commenter ce résultat en le comparant à celui de la question **2.a.** de la **partie B**.

2. *Clown en équilibre :*

2.a. Montrer que, pour une valeur particulière de α dépendant de l'angle β, l'équilibre du système clown-ballon est possible.

2.b. Quelle est la condition sur β pour que le glissement en I ne s'amorce pas ? Faire l'application numérique en prenant f = 0, 2.

2.c. Calculer numériquement α à l'équilibre pour β = 5°.

3. *Mouvement descendant :* Le système clown-ballon descend le plan incliné.
Initialement le ballon et le clown sont immobiles. On prend $\alpha = \beta = 5°$.

3.a. Calculer numériquement $a = \frac{dv}{dt}$ puis la distance parcourue quand le clown atteint la vitesse limite, par rapport au ballon, de 2 $m.s^{-1}$.

3.b. Comparer au résultat de la question **4**.

4. *Mouvement ascendant :* Le clown veut avoir un mouvement ascendant, c'est-à-dire remonter la pente oz'.

a. Montrer que α doit satisfaire à une inégalité, dépendant de β. Si β = 5°, la valeur $\alpha = -15°$ est-elle satisfaisante ? Calculer numériquement $a = \frac{dv}{dt}$ dans ce cas.

b. Calculer, littéralement et numériquement, les composantes R_x et R_z de la réaction du sol sur le ballon et vérifier que le glissement ne peut s'amorcer si f = 0, 2.

c. Quelle longueur le ballon peut-il parcourir avant que le clown perde l'équilibre ? À quelle hauteur cela correspond-il ?

OPTIQUE

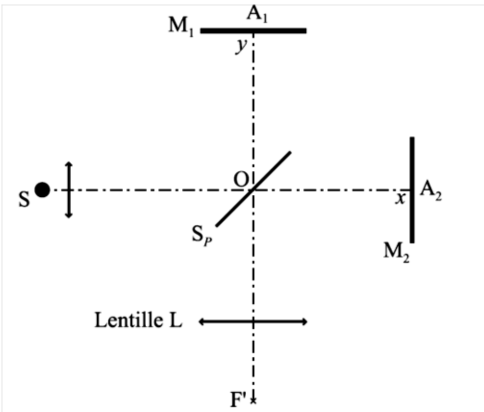
Lorsqu'un gaz ionisé est soumis à un champ d'induction magnétique B, chacune de ses raies spectrales d'émission est remplacée par plusieurs autres raies spectrales: cette décomposition spectrale porte le nom d'effet Zeeman
On étudie expérimentalement l'effet Zeeman avec un interféromètre de Michelson.

1. Les interférences à deux ondes sont produites par des dispositifs à division du front d'onde ou des dispositifs à division d'amplitude.

   1.1 Préciser pour les deux types de dispositifs la localisation des franges en lumière monochromatique dans le cas d'une source ponctuelle et d'une source étendue.
   On donnera un autre exemple du dispositif à division du front d'onde que Michelson.

1.2 Quel est le rôle de la longueur de cohérence temporelle dans les conditions d'observation des franges d'interférences ?

2. Un interféromètre de Michelson est constitué d'une lame appelée séparatrice SP dont les facteurs de transmission et de réflexion sur les amplitudes valent 1/2, et de deux miroirs plans $M_1\ et\ M_2$ perpendiculaires l'un à l'autre. La lame SP est inclinée à 45° par rapport aux normales à $M_1\ et\ M_2$. L'interféromètre est plongé dans l'air. On ne tiendra compte, ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice ni d'éventuels changement de phase par réflexion. L'indice de l'air sera pris égal à 1. On utilise comme source étendue une lampe spectrale de symétrie de révolution autour de l'axe SO parallèle à l'axe Ox. On observe en lumière monochromatique dans le plan focal d'une lentille mince convergente L d'axe Oy et de distance focale $f^{'} = 1\ m$.



2.1 Donner deux caractéristiques de la séparatrice.

2.2 Quelles sont les deux manières de régler le Michelson ? Expliquer.

2.3 On part de la situation où les deux bras sont égaux ($OA_1 = OA_2$. Qu'observe-t-on ?

2.4 Pourquoi est-il nécessaire de diaphragmer la lentille ou de limiter l'inclinaison des rayons incidents issus de la source primaire ?

3. On déplace M_2 normalement à son plan d'une distance $e = 1{,}05\ mm$ dans la direction des x positifs.

3.1 Montrer à l'aide d'un schéma que le phénomène d'interférence observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles.

3.2 Déterminer le rayon du premier anneau brillant correspondant à une raie de longueur d'onde incidente $\lambda_0 = 434{,}1\ nm$. Pour ce faire on exprimera d'abord la différence de marche en fonction de l'angle i puis on déterminera pour i = 0, l'ordre d'interférence avant de calculer le rayon du premier anneau.

CORRECTION PHYSIQUE 4 CONCOURS INGENIEUR 2017

MECANIQUE

A.1) a) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}}_{\text{vecteurs constants}}$ d'où par dérivation : $\overrightarrow{v_H} = \overrightarrow{v_C} = v\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{a_H} = \overrightarrow{a_C} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_x}$.

b) Par associativité du barycentre : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m+M}\left(m\overrightarrow{OC} + M\overrightarrow{OH}\right)$; d'où par dérivation :

$$\overrightarrow{v_G} = \frac{1}{m+M}\left(m\overrightarrow{v_C} + M\overrightarrow{v_H}\right) = \overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_H} = v\overrightarrow{u_x} \text{ et } \overrightarrow{a_G} = \frac{1}{m+M}\left(m\overrightarrow{a_C} + M\overrightarrow{a_H}\right) = \overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_H} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_x}$$

A.2) $\vec{v}_{I\in\text{ballon}} = \vec{v}_{I\in\text{sol}} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_C} + \vec{\omega}_{\text{ballon}} \wedge \overrightarrow{CI} = \vec{0} \Leftrightarrow v = R\omega$.

A.3) $\vec{v}_{A\in\text{clown}} = \overrightarrow{v_H} = v\overrightarrow{u_x}$ et $\vec{v}_{A\in\text{ballon}} = \overrightarrow{v_C} + \vec{\omega}_{\text{ballon}} \wedge \overrightarrow{CA} = v\overrightarrow{u_x} + R\omega(\cos\alpha\overrightarrow{u_x} - \sin\alpha\overrightarrow{u_z})$, donc :

$$\vec{V} = -R\omega(\cos\alpha\overrightarrow{u_x} - \sin\alpha\overrightarrow{u_z}) = v(-\cos\alpha\overrightarrow{u_x} + \sin\alpha\overrightarrow{u_z}).$$

A.4) a) Théorème de Koenig : $\vec{L}_{C,\text{ballon}} = \vec{L}^*_{\text{ballon}} = J_{Cy}\omega\overrightarrow{u_y}$ car, dans son référentiel barycentrique, le ballon est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Cy, axe de symétrie ; finalement :

$$\vec{L}_{C,\text{ballon}} = \frac{2}{3}mR^2\omega\overrightarrow{u_y} = \frac{2}{3}mRv\overrightarrow{u_y}.$$

b) $\vec{L}_{I,\text{ballon}} = \vec{L}_{C,\text{ballon}} + m\overrightarrow{v_C} \wedge \overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}mR^2\omega\overrightarrow{u_y} + mv\overrightarrow{u_x} \wedge (-R\overrightarrow{u_z}) = \frac{5}{3}mRv\overrightarrow{u_y}$.

A.5) a) Le clown étant assimilé à un solide en translation : $\vec{L}_{H,\text{clown}} = \vec{L}^*_{\text{clown}} = \vec{0}$. Il vient ensuite :

$$\vec{L}_{I,\text{clown}} = \vec{L}_{H,\text{clown}} + M\overrightarrow{v_H} \wedge \overrightarrow{HI} = Mv\overrightarrow{u_x} \wedge \left(-R\sin\alpha\overrightarrow{u_x} - R(3+\cos\alpha)\overrightarrow{u_z}\right) = MRv(3+\cos\alpha)\overrightarrow{u_y}.$$

b) Finalement : $\boxed{\vec{L}_{I,\mathcal{S}} = \vec{L}_{I,\text{ballon}} + \vec{L}_{I,\text{clown}} = \left(\frac{5}{3}m + M(3+\cos\alpha)\right)Rv\overrightarrow{u_y}}$.

B.1) Les actions mécaniques **extérieures** agissant sur $\mathcal{S}$ Sont :

- le poids $(m+M)\vec{g}$ appliqué en H,
- l'action de contact du sol $\vec{R} = R_x\overrightarrow{u_x} + R_y\overrightarrow{u_y}$ appliquée en I.

N.B. : Il existe bien entendu une action entre la clown et le ballon, mais c'est une action **intérieure** au système $\mathcal{S}$.

B.2) a) Théorème de Koenig : $\vec{L}_{I,\mathcal{S}} = \vec{L}^*_{\mathcal{S}} + \overrightarrow{IG} \wedge (M+m)\overrightarrow{v_G}$.

Si nous dérivons cette relation par rapport au temps il vient, en utilisant le fait que $\overrightarrow{v_I} = \overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_G}$ (I est le point géométrique du contact situé constamment à la verticale de C), le théorème du moment cinétique en G et le théorème de la résultante cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_{I,\mathcal{S}}}{dt} = \frac{d\vec{L}^*_{\mathcal{S}}}{dt} + \underbrace{(\overrightarrow{v_G} - \overrightarrow{v_I})}_{=\vec{0}} \wedge (M+m)\overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{IG} \wedge (M+m)\overrightarrow{a_G} = \vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ext}\to\mathcal{S}} + \overrightarrow{IG} \wedge \vec{R}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}$$

Le dernier membre est égal au moment pris en I des actions extérieures sur $\mathcal{S}$, d'après la formule de changement de point ; finalement : $\frac{d\vec{L}_{I,\mathcal{S}}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{I,\text{ext}\to\mathcal{S}}$.

Cette relation n'était nullement évidente puisque I **n'**est **pas** un point fixe dans $\mathcal{R}$.

b) $\vec{\mathcal{M}}_{I,\text{ext}\to\mathcal{S}} = \overrightarrow{IG} \wedge (m+M)\vec{g} + \underbrace{\overrightarrow{II}}_{=\vec{0}} \wedge \vec{R} = \underbrace{\overrightarrow{IC} \wedge m\vec{g}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{IH} \wedge M\vec{g} = MgR\sin\alpha\overrightarrow{u_y}$;

$\frac{d\vec{L}_{I,\mathcal{S}}}{dt} = \left(\frac{5}{3}m + M(3+\cos\alpha)\right)R\frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_y}$; il vient donc : $\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{Mg\sin\alpha}{\frac{3}{5}m + M(3+\cos\alpha)}}$.

c) $a = 0{,}205\,\text{m.s}^{-2}$.

B.3) a) Nous trouvons, en appliquant le théorème de la résultante cinétique au système $\mathcal{S}$:

$$\vec{R} = (m+M)\vec{a_H} - (m+M)\vec{g} = (m+M)(a\vec{u_x} + g\vec{u_z})$$

$$\text{soit } R_x = (m+M)a = 13{,}53\,\text{N} \text{ et } R_z = (m+M)g = 646{,}8\,\text{N}$$

b) D'après la loi de Coulomb, le glissement n'apparaît pas si $|R_x| \le f|R_z|$ or : $\dfrac{|R_x|}{|R_z|} = 0{,}02 < f = 0{,}2$.

B.4) Nous obtenons en intégrant par rapport au temps : $v(t) = at + \underbrace{v(0)}_{=0}$ (puisque le système est immobile à l'instant initial). De plus $\|\vec{V}\| = v(t)$; $\|\vec{V}\| \le V_{\max}$ s'écrit : $t \le T = \dfrac{V_{\max}}{a} = 9{,}8\text{s}$.

Nous obtenons en intégrant encore une fois : $x_C(t) = \dfrac{1}{2}at^2 + x_C(0)$. La distance parcourue par le ballon à l'instant T est : $L = \dfrac{1}{2}aT^2 = \dfrac{V_{\max}^2}{2a} = 9{,}8\,\text{m}$.

C.1) Cette formule redonne bien le résultat de B.2.b) dans le cas où $\beta = 0$; à la différence de la question B.2.b) le poids du ballon apparaît ici dans l'expression de l'accélération car son moment en I n'est plus nul.

C.2) a) Le clown est en équilibre si $\dfrac{dv}{dt} = 0$ ce qui est le cas lorsque :

$$\sin(\alpha+\beta) = -\left(1+\frac{m}{M}\right)\sin\beta \Leftrightarrow \alpha = -\beta - \arcsin\left(\left(1+\frac{m}{M}\right)\sin\beta\right) = \alpha_{\text{eq}}$$

b) Dans ce cas, d'après le théorème de la résultante cinétique on a :

$$\vec{R} = -(m+M)\vec{g} = -(m+M)g\sin\beta\,\vec{u_{x'}} + (m+M)g\cos\beta\,\vec{u_{z'}}.$$

Le glissement ne s'amorce pas si : $\dfrac{|R_{x'}|}{|R_{z'}|} \le f \Leftrightarrow \tan\beta < f \Leftrightarrow \beta \le \arctan f = 0{,}20\,\text{rad} = 11{,}3°$

c) $\alpha_{\text{eq}} = -0{,}183\,\text{rad} = -10{,}5°$.

C.3) a) $a = 0{,}635\,\text{m.s}^{-2}$; $L = \dfrac{V_{\max}^2}{2a} = 3{,}15\,\text{m}$.

b) Il n'est pas étonnant que l'accélération soit plus forte en descendant le plan incliné que sur un plan horizontal.

C.4) a) $\dfrac{dv}{dt} < 0 \Leftrightarrow \alpha < \alpha_{\text{eq}}$. Pour $\beta = 5°$, la valeur $\alpha = -15°$ convient et $a = \dfrac{dv}{dt} = -0{,}185\,\text{m.s}^{-2}$.

b) D'après le théorème de la résultante cinétique :

$$\vec{R} = (m+M)\vec{a_H} - (m+M)\vec{g} = (m+M)\big((a - g\sin\beta)\vec{u_{x'}} + g\cos\beta\,\vec{u_{z'}}\big)$$

Ainsi, la composante tangentielle de la force de contact est $R_{x'} = (m+M)(a - g\sin\beta) = -68{,}6\,\text{N}$ et la composante normale : $R_{z'} = (m+M)g\cos\beta = 644\,\text{N}$.

$\dfrac{|R_{x'}|}{|R_{z'}|} = 0{,}10 < f = 0{,}2$ donc le glissement ne peut pas s'amorcer.

c) La longueur maximale parcourue par le ballon est $L = \dfrac{V_{\max}^2}{2a} = 10{,}8\,\text{m}$; le centre du ballon s'élève au maximum de $H = L\sin\beta = 0{,}94\,\text{m}$.

OPTIQUE ONDULATOIRE

H.1.a Avec une source ponctuelle ,on obtient des franges non localisées
Dans l'interféromètre de Michelson avec une source ponctuelle réalisée avec un laser et un objectif de microscope :
Miroirs perpendiculaires : sources secondaires situées sur l'axe de symétrie ; anneaux non localisées
Miroirs à égales distances mais inclinés : sources secondaires décalées franges non localisées
Exemples de dispositif à division de front d'onde : les miroirs de Fresnel, fentes d'Young

Avec une source étendue les franges non localisées se brouillent .
Par division d'amplitude , on obtient alors des franges localisées sur des surfaces.
Dans le cas de l'interféromètre de Michelson
Miroirs parallèles équivalent à une lame d'air : anneaux d'égales inclinaisons localisés à l'infini.
Miroirs équivalent à un coin d'air : franges rectilignes localisées au voisinage des miroirs (pour le Michelson : sur les miroirs ou à l'infini)

H.1.b La différence de marche entre les ondes qui interfèrent doit être inférieure à la longueur de cohérence pour avoir un bon contraste .

H.2.a On observe la teinte plate.

H.2.b Le diaphragme permet de se placer dans les conditions de l'optique de Gauss.

H.3.a
Si M'_2 est le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice, alors , pour un rayon quelconque tel que (1), les trajets réels : KM et MN sont égaux aux trajets symétriques : KM' et M'N. On peut remplacer le miroir M_2 par son symétrique M'_2 et constater alors que l'interféromètre est équivalent à une lame d'air d'épaisseur e, distance entre M_1 et M'_2.

Les réflexions sur les faces de la lame créent des rayons réfléchis parallèles qui interfèrent à l'infini. Les franges sont observées dans le plan focal image de la lentille d'observation.
Les éléments de symétrie du problème permettent de préciser que les franges seront de révolution autour de Oy. Ce sont donc des anneaux.

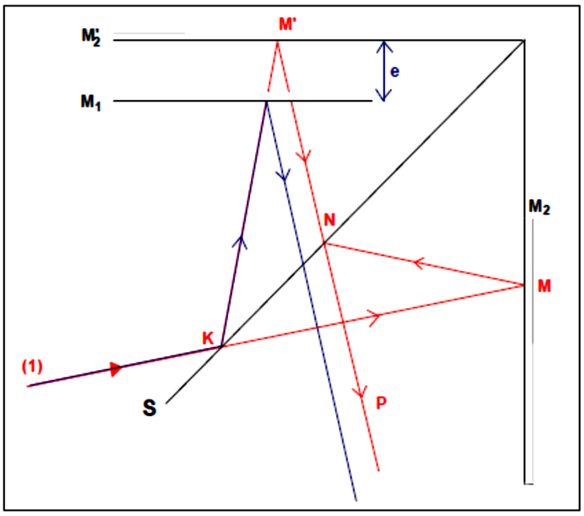
H.3.b La différence de marche (2) - (1) est

pour des angles i petits .
δ est une fonction décroissante de i.

$$\boxed{\delta = 2e\cos i \approx 2e(1-\frac{i^2}{2})}$$

Au centre de l'écran (i = 0) l'ordre d'interférence est :

$$\boxed{p_0 = \frac{2e}{\lambda}}$$



C'est la valeur maximale de p!
Le premier anneau brillant a pour ordre : $p_1 = E(p_0)$
Pour cet anneau

Avec les valeurs numériques données $p_0 = 4837{,}6$
$r_1 \approx 1{,}6$ cm